Trije izreki o končnih množicah

Simona Grabnar

Fakulteta za matematiko in fiziko
Oddelek za matematiko

3. april 2009

Spernerjev izrek

Spernerjev izrek

Definicija

Imamo množico $N = \{1, 2, \ldots, n\}$.
Družina $\mathcal{F}$ *podmnožic množice* N *je antiveriga, če nobena množica iz* $\mathcal{F}$ *ni vsebovana v kakšni drugi množici iz* $\mathcal{F}$.

Spernerjev izrek

Definicija

Imamo množico $N = \{1, 2, \ldots, n\}$.
Družina $\mathcal{F}$ *podmnožic množice* N *je antiveriga, če nobena množica iz* $\mathcal{F}$ *ni vsebovana v kakšni drugi množici iz* $\mathcal{F}$.

Izrek

Velikost največje antiverige n-množice je enaka

$$\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

Erdös-Ko-Rado

Definicija

Imenujmo družino $\mathcal{F}$, ki je družina vseh podmnožic, presečna družina, če imata vsaki dve množici te družine najmanj en element skupen.

Erdös-Ko-Rado

Definicija

Imenujmo družino $\mathcal{F}$, ki je družina vseh podmnožic, presečna družina, če imata vsaki dve množici te družine najmanj en element skupen.

Velikost največje presečne družine je enaka 2^{n-1}.

Erdös-Ko-Rado

Definicija

Imenujmo družino $\mathcal{F}$, ki je družina vseh podmnožic, presečna družina, če imata vsaki dve množici te družine najmanj en element skupen.

Velikost največje presečne družine je enaka 2^{n-1}.

Izrek

Največja velikost presečne k-družine v n-množici je

$$\binom{n-1}{k-1},$$

kjer je $n \geq 2k$.

Primer

$n = 4$

$k = 2$

$\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}$

velikost: $\binom{3}{1} = 3$

Primer

$n = 4$
$k = 2$
$\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$
velikost: $\binom{3}{1} = 3$

Lema

Naj bo $n \geq 2k$. Predpostavimo, da je podanih vsaj t različnih lokov $A_1, A_2, \ldots, A_t$ dolžine k, takšnih, da imata vsaka dva loka skupno eno povezavo. Potem je $t \leq k$.

Hallov izrek

Hallov izrek

Definicija

Naj bo X končna množica in $A_1, \ldots, A_n$ njene podmnožice (ne nujno različne). Zaporedju $x_1, \ldots, x_n$ pravimo sistem različnih predstavnikov (SRP) $A_1, \ldots, A_n$, če $x_i \in A_i$ in so x_i različni elementi ($i \in \{1, \ldots, n\}, n \in N$).

Hallov izrek

Definicija

Naj bo X končna množica in $A_1, \ldots, A_n$ njene podmnožice (ne nujno različne). Zaporedju $x_1, \ldots, x_n$ pravimo sistem različnih predstavnikov (SRP) $A_1, \ldots, A_n$, če $x_i \in A_i$ in so x_i različni elementi ($i \in \{1, \ldots, n\}, n \in N$).

Izrek

Naj bodo $A_1, \ldots, A_n$ neprazne podmnožice končne množice X. Zaporedje SRP obstaja natanko tedaj, ko unija vsakih m množic A_i vsebuje vsaj m elementov, $1 \leq m \leq n$.